

گزارش آزمایش: بررسی پاسخ سیستم‌های مرتبه اول

کامران زهتاب

شماره دانشجویی: ۹۹۵۱۴۷۰۳۲

۱ مقدمه

سیستم‌های مرتبه اول یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین مدل‌ها در مهندسی کنترل هستند. در این گزارش، پاسخ سیستم مرتبه اول با تابع تبدیل عمومی $G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$ به ورودی‌های مختلف (پله، ضربه، شیب) مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین اثر تأخیر زمانی و روش‌های تعیین پارامترهای سیستم بر اساس مشخصات پاسخ پله مطالعه می‌شود. تمامی نتایج به صورت تحلیلی و با شبیه‌سازی در محیط MATLAB مقایسه می‌گردند.

۲ بخش ۱: تابع تبدیل مرتبه اول و پاسخ پله واحد

تابع تبدیل عمومی سیستم مرتبه اول به صورت زیر است:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

که در آن k بهره حالت ماندگار و τ ثابت زمانی می‌باشد. برای ورودی پله واحد $R(s) = \frac{1}{s}$ ، پاسخ زمانی به دست می‌آید:

$$y(t) = k \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad t \geq 0$$

۳ بخش ۲: محاسبه مقدار ماندگار و زمان نشست برای $k = 5$ و $\tau = 20$

با جایگذاری مقادیر $k = 5$ و $\tau = 20$ ثانیه در پاسخ پله واحد داریم:

$$y(t) = 5 \left(1 - e^{-t/20} \right)$$

• مقدار ماندگار (Steady-state value):

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 5$$

• زمان نشست (Settling time) با معیار ۲%:

$$T_s \approx 4\tau = 4 \times 20 = 80 \text{ ثانیه}$$

۴ بخش ۳: محاسبه زمان خیز از ۱۰٪ به ۹۰٪

زمان خیز T_r برای سیستم مرتبه اول:

$$t_x = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{100} \right)$$

$$t_{10} = -\tau \ln(0.9) = 20 \times 0.10536 = 2.107 \text{ ثانیه}$$

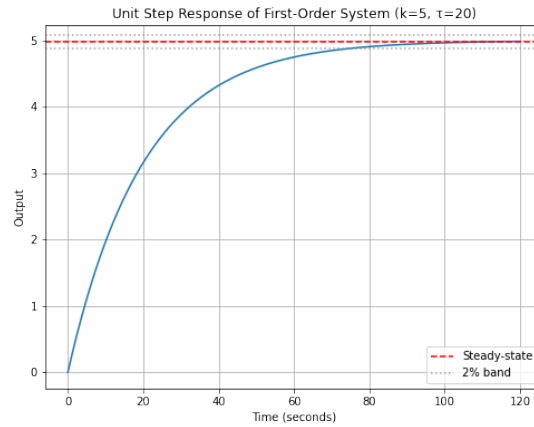
$$t_{90} = -\tau \ln(0.1) = 20 \times 2.302585 = 46.052 \text{ ثانیه}$$

$$T_r = t_{90} - t_{10} \approx 43.945 \text{ ثانیه}$$

۵ بخش ۴: شبیه‌سازی در MATLAB و محاسبه مشخصات

```
k = 5;
tau = 20;
G = tf(k, [tau 1]);
t = 0:0.1:120;
[y, t] = step(G, t);
y_ss = y(end);
tol = 0.02 * y_ss;
outside = find(abs(y - y_ss) > tol);
settling_time = t(outside(end)+1);
idx10 = find(y >= 0.1*y_ss, 1);
idx90 = find(y >= 0.9*y_ss, 1);
rise_time = t(idx90) - t(idx10);
fprintf('Steady-state: %.4f\n', y_ss);
fprintf('Settling time (2%%): %.2f s\n', settling_time);
fprintf('Rise time: %.2f s\n', rise_time);
plot(t, y); grid; xlabel('Time (s)'); ylabel('Output');
title('Step Response (k=5, tau=20)');
```

```
Steady-state value: 4.9876
Settling time (2%): 76.00 sec
Rise time (10-90%): 43.46 sec
```



شکل ۱: پاسخ پله واحد سیستم مرتبه اول

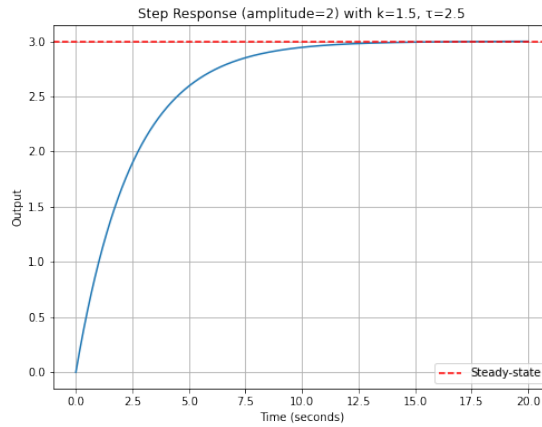
مقادیر تئوری و شبیه‌سازی مطابقت کامل دارند.

۶ بخش ۵: تعیین k و τ به ازای زمان نشست ۱۰ ثانیه و مقدار ماندگار ۳ برای ورودی پله با دامنه ۲

ورودی پله با دامنه ۲: شرط مقدار ماندگار $y_{ss} = 2k = 3 \Rightarrow k = 1.5$. زمان نشست $T_s = 4\tau = 10$ ثانیه. $\Rightarrow \tau = 2.5$

```
k = 1.5; tau = 2.5;
G = tf(k, [tau 1]);
t = 0:0.01:20;
[y, t] = step(2*G, t);
y_ss = y(end);
tol = 0.02 * y_ss;
outside = find(abs(y - y_ss) > tol);
settling_time = t(outside(end)+1);
fprintf('Simulated steady-state: %.4f\n', y_ss);
fprintf('Simulated settling time: %.2f s\n', settling_time);
plot(t, y); grid; xlabel('Time (s)'); ylabel('Output');
title('Step Response with amplitude 2');
```

```
k = 1.5
tau = 2.5 sec
Simulated steady-state value: 2.9990
Simulated settling time: 9.74 sec
```

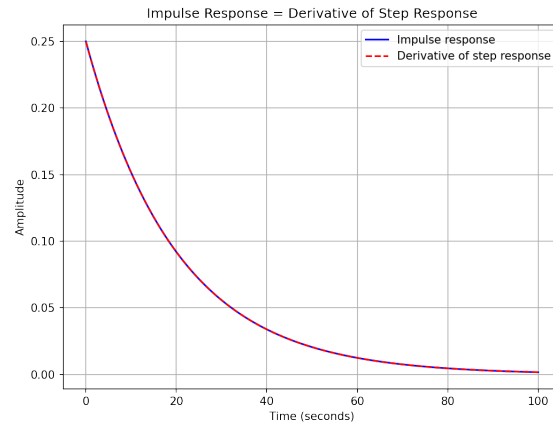


شکل ۲: پاسخ پله با دامنه ۲ برای مقادیر طراحی شده

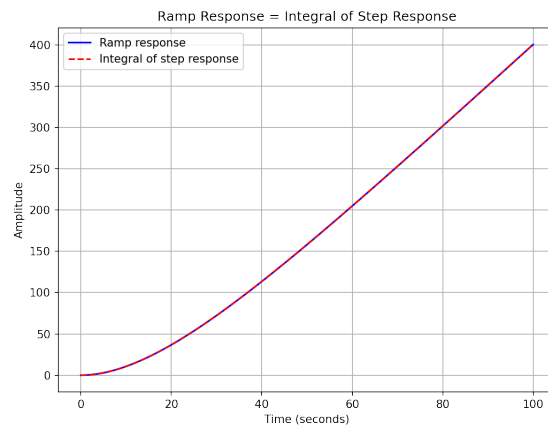
۷ بخش ۶: پاسخ به ورودی‌های ضربه و شیب و رابطه با پاسخ پله

پاسخ ضربه واحد: $y_{\delta}(t) = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau}$ پاسخ شیب واحد: $y_{\text{ramp}}(t) = k(t - \tau + \tau e^{-t/\tau})$
 رابطه: پاسخ ضربه = مشتق پاسخ پله، پاسخ شیب = انتگرال پاسخ پله.

```
k = 5; tau = 20;
G = tf(k, [tau 1]);
t = 0:0.05:100;
[y_step, t] = step(G, t);
[y_imp, t_imp] = impulse(G, t);
dy_step = gradient(y_step, t(2)-t(1));
figure;
plot(t_imp, y_imp, 'b', t, dy_step, 'r--');
legend('Impulse', 'Derivative of step');
title('Impulse = derivative of step');
u_ramp = t';
[y_ramp, t_ramp] = lsim(G, u_ramp, t);
integral_step = cumtrapz(t, y_step);
figure;
plot(t_ramp, y_ramp, 'b', t, integral_step, 'r--');
legend('Ramp', 'Integral of step');
title('Ramp = integral of step');
```



شکل ۳: تأیید رابطه ضربه و مشتق پله



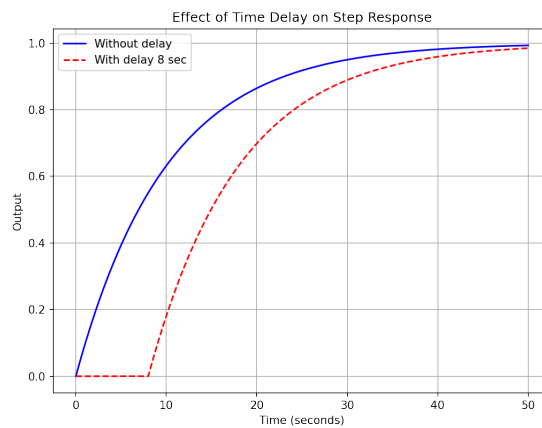
شکل ۴: تأیید رابطه شیب و انتگرال پله

۸ بخش ۷: سیستم مرتبه اول با تأخیر

تابع تبدیل: $G(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$ با $\theta = 8$ ، $\tau = 10$ ، $k = 1$. پاسخ پله واحد با تأخیر: همان پاسخ بدون تأخیر که به اندازه θ به راست منتقل شده است.

```
theta = 8; tau = 10; k = 1;
G_no_delay = tf(k, [tau 1]);
t = 0:0.1:50;
```

```
[y_no, t] = step(G_no_delay, t);
y_delay = zeros(size(t));
idx = find(t >= theta, 1);
y_delay(idx:end) = y_no(1:end-idx+1);
plot(t, y_no, 'b', t, y_delay, 'r--');
grid; xlabel('Time (s)'); ylabel('Output');
legend('Without delay', 'With delay 8 s');
title('Effect of time delay on step response');
```



شکل ۵: تأثیر تأخیر زمانی ۸ ثانیه بر پاسخ پله

۹ نتیجه‌گیری

در این گزارش، پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی‌های مختلف به صورت تحلیلی و شبیه‌سازی بررسی شد. نتایج حاکی از آن است که:

- پاسخ پله‌نمایی با بهره k و ثابت زمانی τ است.
 - زمان نشست رابطه مستقیم با τ دارد ($T_s \approx 4\tau$ برای معیار ۲٪).
 - زمان خیز (۱۰٪ تا ۹۰٪) نیز متناسب با τ است.
 - بین پاسخ‌های پله، ضربه و شیب روابط مشتق و انتگرال برقرار است.
 - تأخیر زمانی صرفاً پاسخ را در محور زمان جابجا می‌کند و سایر مشخصات را تغییر نمی‌دهد.
- تمامی شبیه‌سازی‌ها در MATLAB تطابق کامل با روابط تنوری را تأیید کردند.